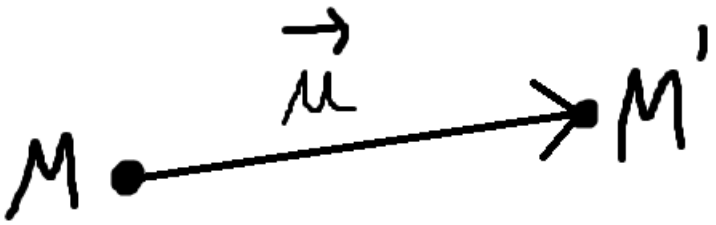
Transformations et configurations planes

Transformations et configurations planes 1
1. Translation 2
2. Réflexion 2
3. Rotation 3
4. Homothétie 4
5. Ce qui est conservé et ce qui ne l'est pas 5
6. Longueurs, aires et volumes avec les homothéties 6
7. Déterminer les paramètres d'une homothétie 7
8. Solutions 9

1. Translation

Le point M' est l'image du point M par la translation de vecteur $\vec{u}$
ssi
$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.
On note : $t_{\vec{u}}$ pour la translation de vecteur $\vec{u}$
$M' = t_{\vec{u}}(M)$.

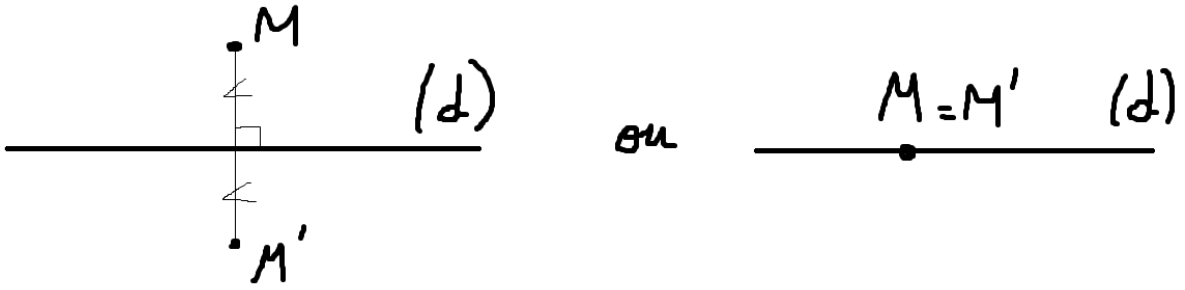


Exercice 1 : translation

Soit le triangle ABC tels que $AB = 3\ cm$, $BC = 2\ cm$ et $AC = 2{,}5\ cm$.
Soit t, la translation de vecteur $2\overrightarrow{AB}$.
Dessiner le triangle ABC et puis le triangle $A'B'C'$, l'image du triangle ABC par la translation t.

2. Réflexion

Le point M' est l'image du point M par la réflexion d'axe (d)
ssi
(d) est la médiatrice du segment $[MM']$ ou $M = M' \in (d)$.
On note : $s_{(d)}$ pour la réflexion d'axe (d)
$M' = s_{(d)}(M)$
$s_{(d)}$ s'appelle aussi symétrie axiale d'axe (d)
M' est le symétrique de M par rapport à (d) .



Exercice 2 : réflexion

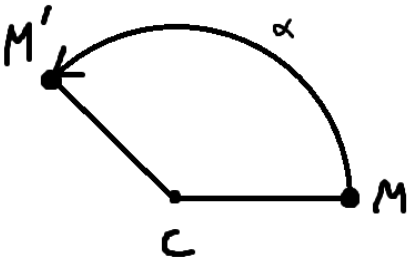
Soit le triangle ABC tels que $AB = 3\ cm$, $BC = 2\ cm$ et $AC = 2{,}5\ cm$.
Soit s, la réflexion d'axe (AB).
Dessiner le triangle ABC et puis le triangle $A'B'C'$, l'image du triangle ABC par la réflexion s.

3. Rotation

Le point M' est l'image du point M par la rotation d'angle α et de centre C ssi $\left(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CM'}\right) = \alpha$.

On note : $r_{(C,\alpha)}$ pour la rotation d'angle α et de centre C

$M' = r_{(C,\alpha)}(M)$.



Exercice 3 : rotation

Soit le triangle ABC tels que $AB = 3\ cm$, $BC = 2\ cm$ et $AC = 2{,}5\ cm$.

Soit r_1, la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de centre A.

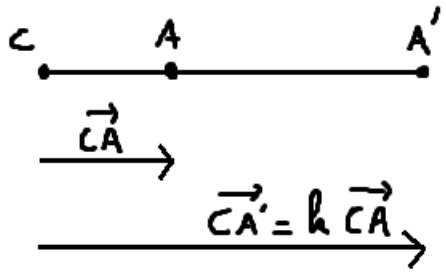
Dessiner le triangle ABC et puis le triangle $A'B'C'$, l'image du triangle ABC par la rotation r_1.

Soit r_2, la rotation d'angle $\frac{-\pi}{3}$ et de centre A.

Dessiner le triangle $A''B''C''$, l'image du triangle ABC par la rotation r_2.

4. Homothétie

Le point M' est l'image du point M par l'homothétie de centre C et de rapport $k \neq 0$ ssi
$\overrightarrow{CM'} = k\,\overrightarrow{CM}$.
On note : $h_{(C,k)}$ pour l'homothétie de centre C et de rapport k
$M' = h_{(C,k)}(M)$.



Remarque : La symétrie centrale de centre C est l'homothétie de centre C et de rapport -1.

Propriété

Soit h, l'homothétie de centre C et de rapport k.
Soient les points A et B tels que $A' = h(A)$ et $B' = h(B)$.
Alors : $\overrightarrow{A'B'} = k\,\overrightarrow{AB}$.

Preuve :

$\overrightarrow{CA'} = k\,\overrightarrow{CA}$
$\overrightarrow{CB'} = k\,\overrightarrow{CB}$
$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'C} + \overrightarrow{CB'} = -\overrightarrow{CA'} + \overrightarrow{CB'} = -k\,\overrightarrow{CA} + k\,\overrightarrow{CB} = k\,\overrightarrow{AC} + k\,\overrightarrow{CB} = k\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) = k\,\overrightarrow{AB}$
c.q.f.d.

Exercice 4 : homothétie

Soit le triangle ABC tels que $AB = 3\ cm$, $BC = 2\ cm$ et $AC = 2{,}5\ cm$.
Soit les homothéties de centre A et de rapport 3, 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{-1}{3}$, -3.
Dessiner le triangle ABC et puis:

- le triangle $A'B'C'$, l'image du triangle ABC par l'homothétie de rapport 3 ;
- le triangle $A''B''C''$, l'image du triangle ABC par l'homothétie de rapport 1 ;
- le triangle $A'''B'''C'''$, l'image du triangle ABC par l'homothétie de rapport $\frac{1}{3}$;
- le triangle $A''''B''''C''''$, l'image du triangle ABC par l'homothétie de rapport $\frac{-1}{3}$;
- le triangle $A'''''B'''''C'''''$, l'image du triangle ABC par l'homothétie de rapport -3.

5. Ce qui est conservé et ce qui ne l'est pas

Exercice 5 : conservé ou pas ?

Compléter par « oui » ou « NON » le tableau suivant.
Les points A', B' et C' sont les images respectives des points A, B et C.

	Translation	Réflexion	Rotation	Homothétie	Symétrie centrale
Le parallélisme est conservé, c'est-à-dire les images de deux droites parallèles sont parallèles.					
L'orthogonalité est conservée, c'est-à-dire les images de deux droites perpendiculaires sont perpendiculaires.					
Les angles orientés sont conservé, c'est-à-dire $\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.					
Les angles géométriques sont conservé, c'est-à-dire $\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}$.					
La distance est conservée, c'est-à-dire $A'B' = AB$.					
Le contact est conservé, c'est-à-dire les images de deux lignes tangentes sont tangentes.					

6. Longueurs, aires et volumes avec les homothéties

Propriété

Une homothétie de rapport k multiplie les longueurs par $|k|$, les aires par k^2 et les volumes par $|k|^3$.

Exercice 6 : homothétie, longueurs et aires

Soit un segment $[AB]$ de longueur 3 cm.
Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre B et de rayon $r = 1\ cm$.

a) $(\mathcal{C}')$ est l'image de $(\mathcal{C})$ par l'homothétie de centre A et de rapport 2.
b) $(\mathcal{C}')$ est l'image de $(\mathcal{C})$ par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$.
c) $(\mathcal{C}')$ est l'image de $(\mathcal{C})$ par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{-1}{2}$.
d) $(\mathcal{C}')$ est l'image de $(\mathcal{C})$ par l'homothétie de centre A et de rapport -2.

Calculer $\mathcal{A}$, l'aire du cercle $(\mathcal{C})$.

Pour chaque cas:

- dessiner $[AB]$, $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$;
- calculer le rayon r' de $(\mathcal{C}')$;
- calculer $\mathcal{A}'$, l'aire du cercle $(\mathcal{C}')$.

Exercice 7 : homothétie et aire (facultatif)

Soit un polygone $ABCD$ dont l'aire $\mathcal{A}$ est égale à 4 cm^2.

a) Le polygone $A'B'C'D'$ est l'image de $ABCD$ par une homothétie de rapport $\frac{3}{2}$.
b) Le polygone $A'B'C'D'$ est l'image de $ABCD$ par une homothétie de rapport $\frac{-3}{2}$.
c) Le polygone $A'B'C'D'$ est l'image de $ABCD$ par une homothétie de rapport $\frac{2}{3}$.
d) Le polygone $A'B'C'D'$ est l'image de $ABCD$ par une homothétie de rapport $\frac{-2}{3}$.

Pour chaque cas calculer $\mathcal{A}'$ l'aire du polygone $A'B'C'D'$.

Exercice 8 : homothétie et volume (facultatif)

Soit un solide $ABCD$ dont le volume $\mathcal{V}$ est égal à 10 cm^3.

a) Soit h une homothétie de rapport $\frac{5}{2}$.
b) Soit h une homothétie de rapport $\frac{-5}{2}$.
c) Soit h une homothétie de rapport $\frac{2}{5}$.
d) Soit h une homothétie de rapport $\frac{-2}{5}$.

Pour chaque cas calculer $\mathcal{V}'$, le volume de $A'B'C'D'$ qui est l'image de $ABCD$ par h.

7. Déterminer les paramètres d'une homothétie

Exercice 9: déterminer le rapport d'une homothétie

Soient F et G deux points distincts.
Soit le point E tel que $3\overrightarrow{EF} = -2\,\overrightarrow{FG}$.
Que vaut le rapport de l'homothétie h ?

a) Le point G est l'image du point E par l'homothétie h de centre F.
b) Le point F est l'image du point G par l'homothétie h de centre E.
c) Le point E est l'image du point F par l'homothétie h de centre G.

Exercice 10: déterminer le rapport d'une homothétie (facultatif)

Soient A et C deux points distincts.
Soit le point B tel que $-5\overrightarrow{BA} = 3\,\overrightarrow{AC}$.
Que vaut le rapport de l'homothétie h ?

a) Le point B est l'image du point C par l'homothétie h de centre A.
b) Le point C est l'image du point A par l'homothétie h de centre B.
c) Le point A est l'image du point B par l'homothétie h de centre C.

Exercice 11: déterminer le centre d'une homothétie

Soient deux points A et B tels que la distance $AB = 8\ cm$. Soit le point C, le centre de l'homothétie de rapport k qui applique (transforme) le point A sur le point B. Dessiner les points A, B et C.

a) Le rapport $k = 3$.
b) Le rapport $k = \frac{1}{3}$.
c) Le rapport $k = -3$.
d) Le rapport $k = \frac{-1}{3}$.

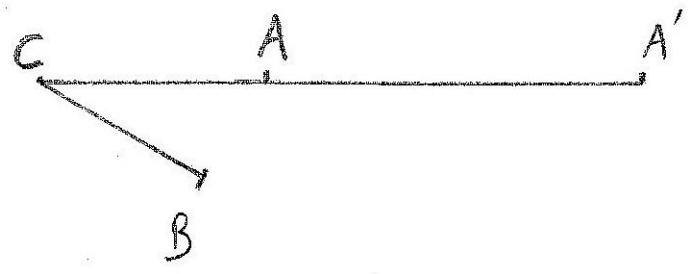
Exercice 12: déterminer le centre d'une homothétie (facultatif)

Soient deux points E et F tels que la distance $AB = 7{,}5\ cm$. Soit le point C, le centre de l'homothétie de rapport k qui applique (transforme) le point E sur le point F. Dessiner les points A, B et C.

a) Le rapport $k = 4$.
b) Le rapport $k = \frac{1}{4}$.
c) Le rapport $k = -4$.
d) Le rapport $k = \frac{-1}{4}$.

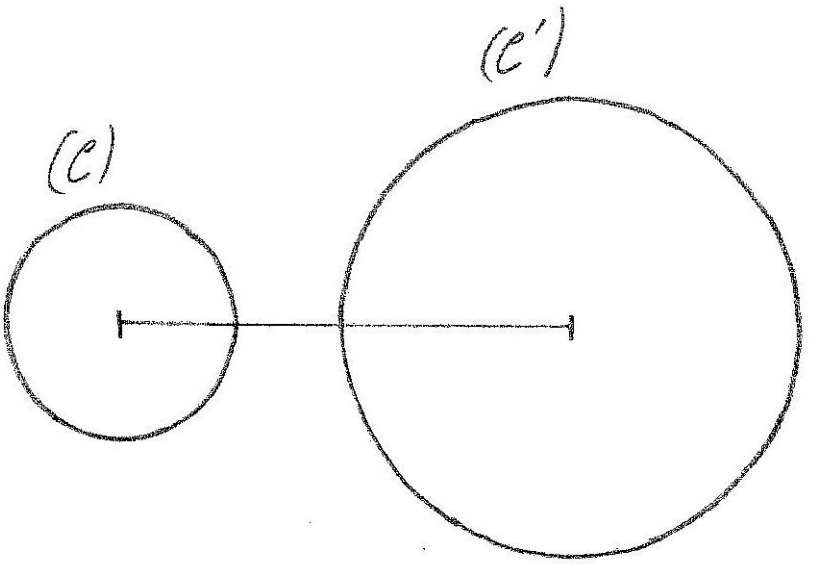
Exercice 13: construire l'image d'une homothétie sans connaître son rapport k (facultatif)

Le point A' est l'image du point A par une homothétie de centre C mais dont on ne connaît pas le rapport. Construire B', l'image du point B par cette même homothétie, sans calculer le rapport de cette homothétie.

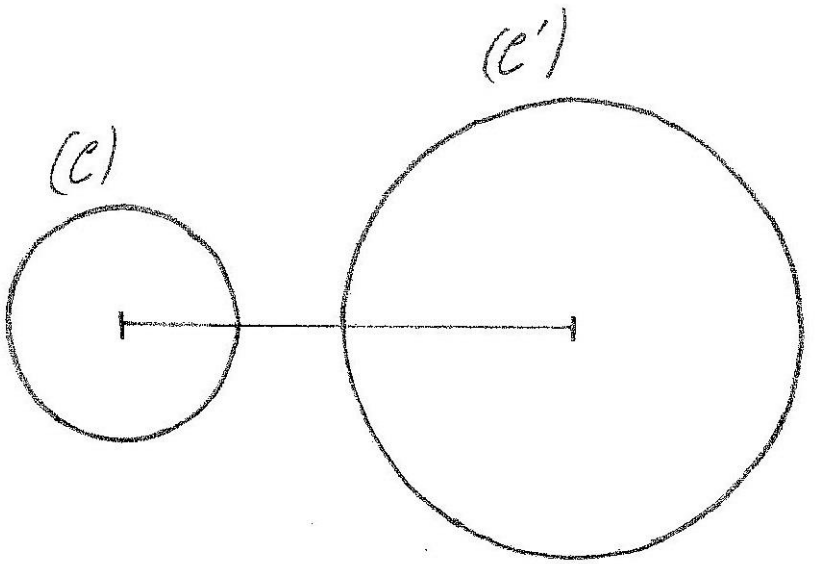


Exercice 14: déterminer le centre d'une homothétie (facultatif)

a) Le cercle $(\mathcal{C}')$ est l'image du cercle $(\mathcal{C})$ une homothétie de rapport $k > 0$. Construire le centre C de cette homothétie.



b) Le cercle $(\mathcal{C}')$ est l'image du cercle $(\mathcal{C})$ une homothétie de rapport $k < 0$. Construire le centre C de cette homothétie.



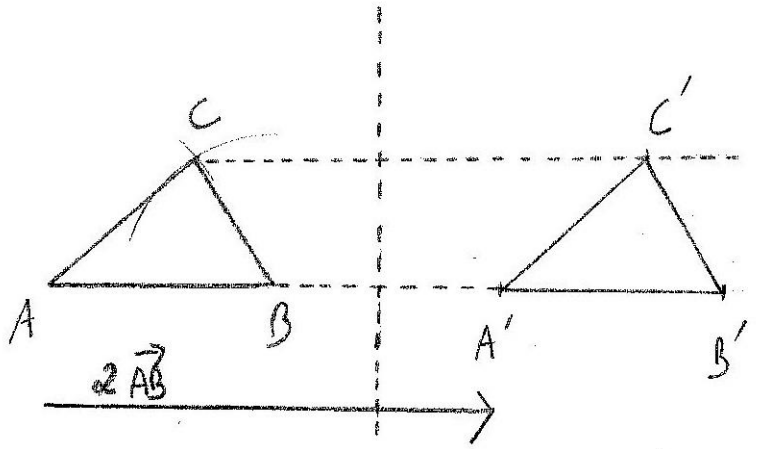
Exercice 15: centre de gravité et homothétie (facultatif)

Soit un triangle ABC. Soit G, le centre de gravité de ce triangle. Soient A', B' et C', les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

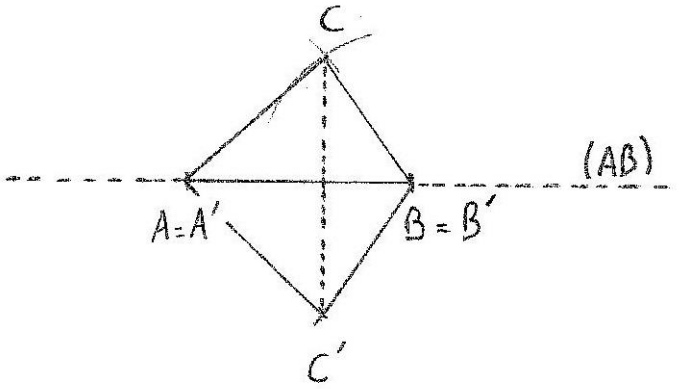
a) Soit l'homothétie de centre A qui transforme G sur A'. Quelle est le rapport de cette homothétie ?
b) Soit l'homothétie de centre G qui transforme A' sur A. Quelle est le rapport de cette homothétie ?

8. Solutions

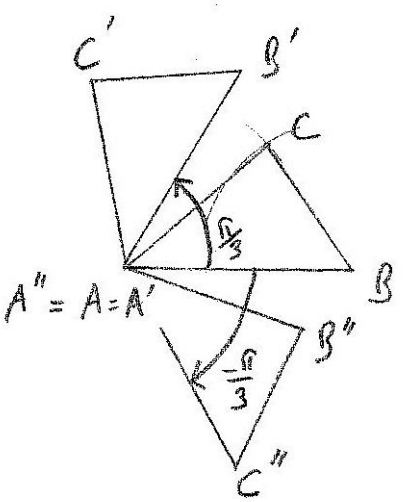
Exercice 1 : translation



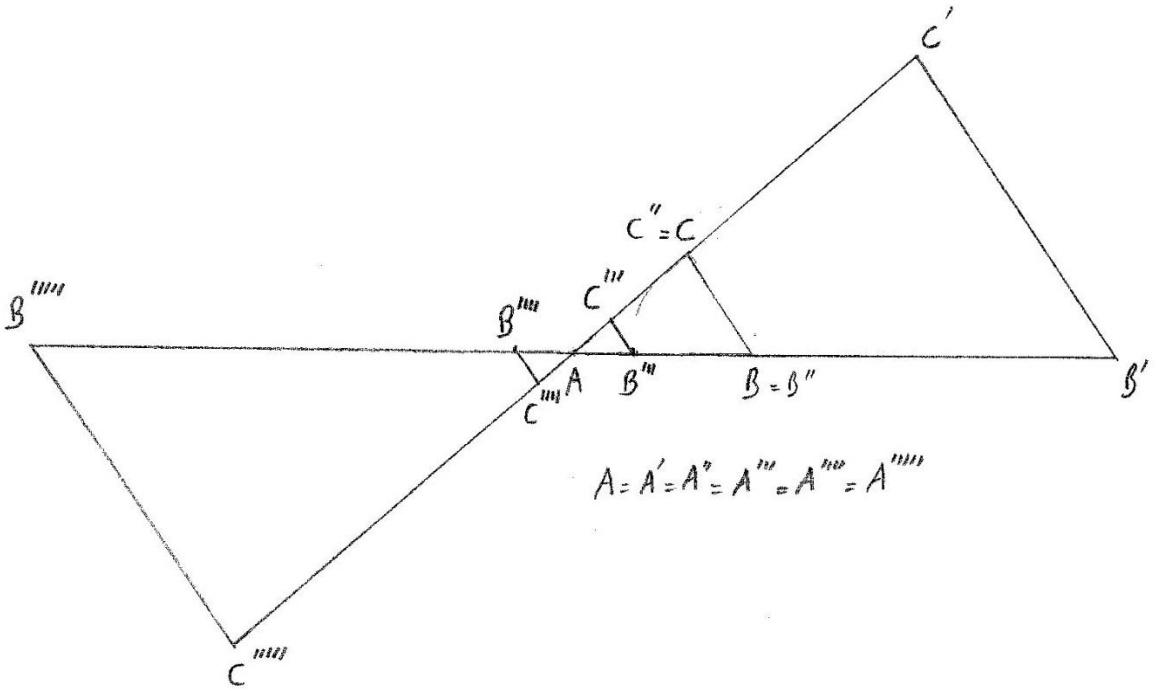
Exercice 2 : réflexion



Exercice 3 : rotation



Exercice 4 : homothétie

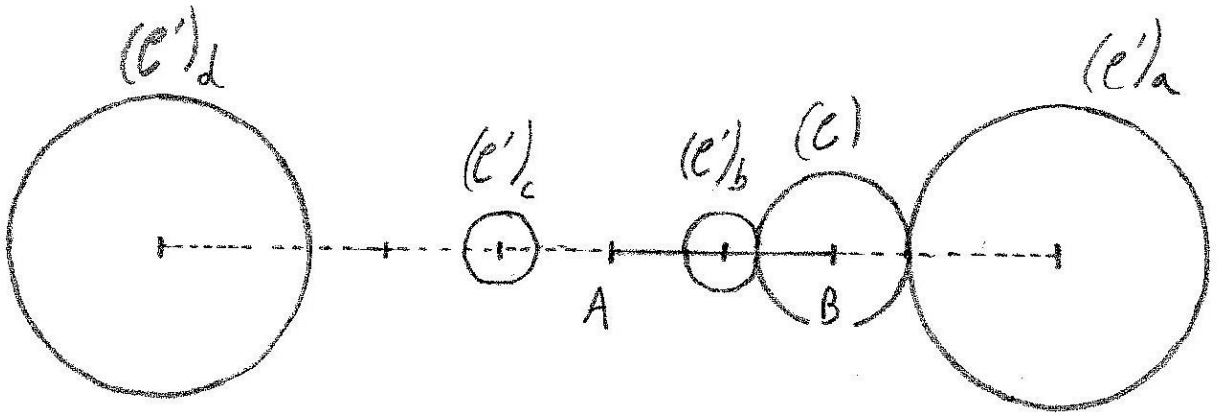


Exercice 5 : conservé ou pas ?

	Translation	Réflexion	Rotation	Homothétie	Symétrie centrale
Le parallélisme est conservé, c'est-à-dire les images de deux droites parallèles sont parallèles.	oui	oui	oui	oui	oui
L'orthogonalité est conservée, c'est-à-dire les images de deux droites perpendiculaires sont perpendiculaires.	oui	oui	oui	oui	oui
Les angles orientés sont conservé, c'est-à-dire $\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.	oui	NON	oui	oui	oui
Les angles géométriques sont conservé, c'est-à-dire $\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}$.	oui	oui	oui	oui	oui
La distance est conservée, c'est-à-dire $A'B' = AB$.	oui	oui	oui	NON	oui
Le contact est conservé, c'est-à-dire les images de deux lignes tangentes sont tangentes.	oui	oui	oui	oui	oui

Exercice 6 : homothétie, longueurs et aires

$\mathcal{A} = \pi(1\ cm)^2 = \pi\ cm^2$



a) $r' = |k|r = |2|1\ cm = 2\ cm$
$\mathcal{A}' = k^2\mathcal{A} = (2)^2\pi\ cm^2 = 4\pi\ cm^2$

b) $r' = |k|r = \left|\frac{1}{2}\right| 1\ cm = \frac{1}{2}\ cm$
$\mathcal{A}' = k^2\mathcal{A} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \pi\ cm^2 = \frac{1}{4}\pi\ cm^2$

c) $r' = |k|r = |-2|1\ cm = 2\ cm$
$\mathcal{A}' = k^2\mathcal{A} = (-2)^2\pi\ cm^2 = 4\pi\ cm^2$

d) $r' = |k|r = \left|\frac{-1}{2}\right| 1\ cm = \frac{1}{2}\ cm$
$\mathcal{A}' = k^2\mathcal{A} = \left(\frac{-1}{2}\right)^2 \pi\ cm^2 = \frac{1}{4}\pi\ cm^2$

Exercice 7 : homothétie et aire (facultatif)

a) $\mathcal{A}' = k^2\mathcal{A} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 4\ cm^2 = 9\ cm^2$

b) $\mathcal{A}' = k^2\mathcal{A} = \left(\frac{-3}{2}\right)^2 4\ cm^2 = 9\ cm^2$

c) $\mathcal{A}' = k^2\mathcal{A} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 4\ cm^2 = \frac{16}{9}\ cm^2$

d) $\mathcal{A}' = k^2\mathcal{A} = \left(\frac{-2}{3}\right)^2 4\ cm^2 = \frac{16}{9}\ cm^2$

Exercice 8 : homothétie et volume (facultatif)

a) $\mathcal{V}' = |k|^3\mathcal{V} = \left|\frac{5}{2}\right|^3 10\ cm^3 = \frac{625}{4}\ cm^2$

b) $\mathcal{V}' = |k|^3\mathcal{V} = \left|\frac{-5}{2}\right|^3 10\ cm^3 = \frac{625}{4}\ cm^2$

c) $\mathcal{V}' = |k|^3\mathcal{V} = \left|\frac{2}{5}\right|^3 10\ cm^3 = \frac{16}{25}\ cm^2$

d) $\mathcal{V}' = |k|^3\mathcal{V} = \left|\frac{-2}{5}\right|^3 10\ cm^3 = \frac{16}{25}\ cm^2$

Exercice 9: déterminer le rapport d'une homothétie

a) $G = h_{\left(F,\frac{3}{2}\right)}(E)$; $k = \frac{3}{2}$

b) $F = h_{(E,-2)}(G)$; $k = -2$

c) $E = h_{\left(G,\frac{1}{3}\right)}(F)$; $k = \frac{1}{3}$

Exercice 10: déterminer le rapport d'une homothétie (facultatif)

a) $B = h_{\left(A,\frac{3}{5}\right)}(C)$; $k = \frac{3}{5}$

b) $C = h_{\left(B,\frac{-2}{3}\right)}(A)$; $k = \frac{-2}{3}$

c) $A = h_{\left(C,\frac{5}{2}\right)}(B)$; $k = \frac{5}{2}$

Exercice 11: déterminer le centre d'une homothétie

a) $\overrightarrow{CB} = 3\,\overrightarrow{CA}$
$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = 3\,\overrightarrow{CA}$
$\overrightarrow{AB} = 2\,\overrightarrow{CA}$
$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA}$

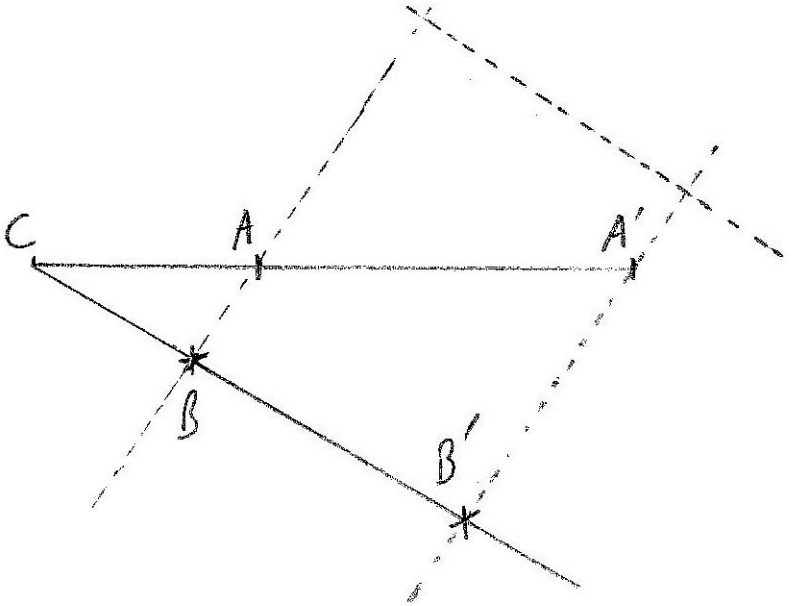
b) $\overrightarrow{CB} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{CA}$
$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{CA}$
$\overrightarrow{AB} = \frac{-2}{3}\,\overrightarrow{CA}$
$\frac{-3}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA}$

c) $\overrightarrow{CB} = -3\,\overrightarrow{CA}$
$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = -3\,\overrightarrow{CA}$
$\overrightarrow{AB} = -4\,\overrightarrow{CA}$
$\frac{-1}{4}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA}$

d) $\overrightarrow{CB} = \frac{-1}{3}\,\overrightarrow{CA}$
$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \frac{-1}{3}\,\overrightarrow{CA}$
$\overrightarrow{AB} = \frac{-4}{3}\,\overrightarrow{CA}$
$\frac{-3}{4}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA}$

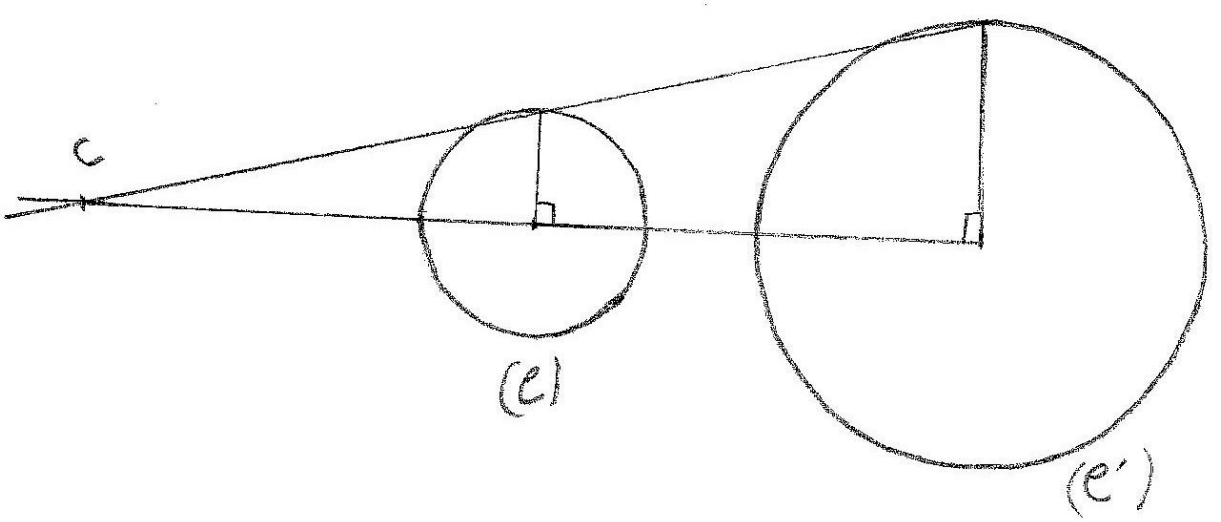
Exercice 12: déterminer le centre d'une homothétie (facultatif)

Exercice 13: construire l'image d'une homothétie sans connaître son rapport *k* (facultatif)

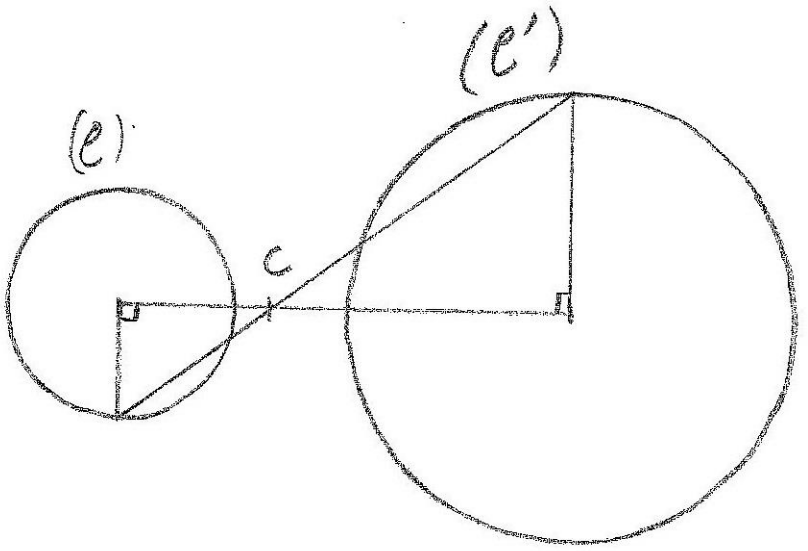


Exercice 14: déterminer le centre d'une homothétie (facultatif)

a)



b)



Exercice 15: centre de gravité et homothétie (facultatif)

a) $\overrightarrow{AA'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$

$k = \frac{3}{2}$

b) $\overrightarrow{GA} = 2\,\overrightarrow{A'G}$

$\overrightarrow{GA} = -2\,\overrightarrow{GA'}$

$k = -2$